

OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 4 de 1998.

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x - 2)e^x$.

- Determina los intervalos en los que la función f es creciente
- Dibuja la región limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x = 1$ y $x = 3$.
- Halla el área de la región descrita en el apartado anterior

Solución

(a)

Estudiamos el signo de $f'(x)$, con lo cual obtendremos también los extremos relativos

$$f(x) = (x - 2)e^x$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x - 2)e^x = e^x \cdot (x - 1)$$

$$f'(x) = 0, \text{ como la exponencial no es cero nos resulta } x = 1$$

Como $f'(x) < 0$ si $x < 1$, $f(x)$ es decreciente si $x < 1$

Como $f'(x) > 0$ si $x > 1$, $f(x)$ es creciente si $x > 1$

Por tanto por definición en $x = 1$ tiene un mínimo relativo, que vale $f(1) = -e$.

(b)

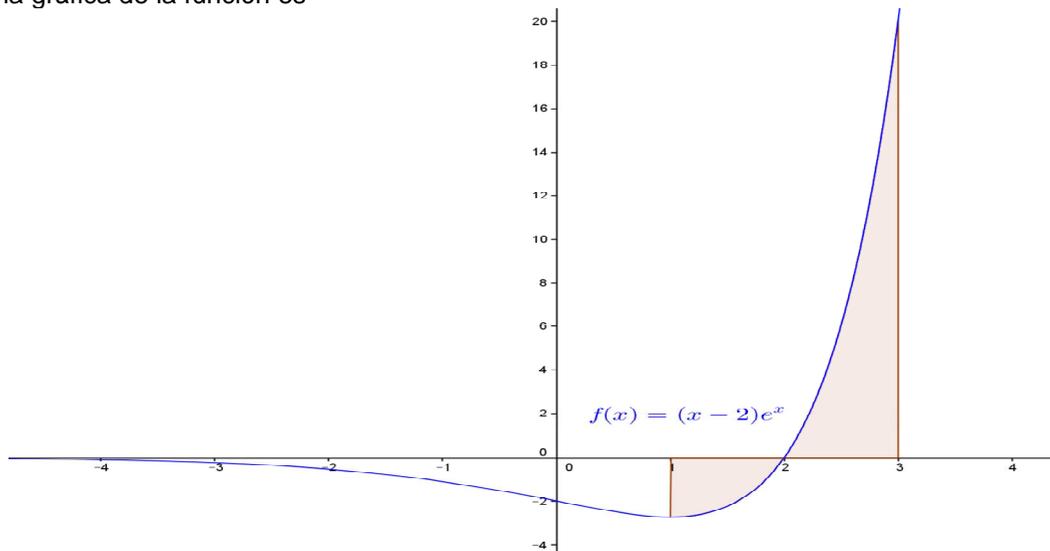
El dominio es \mathbb{R}

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2) \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 2) \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(-x - 2)] / e^x = 0$$

luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en $-\infty$

Por tanto la gráfica de la función es



(c)

La integral que sale en el área es por partes, la haremos antes

La integral $\int (x - 2) \cdot e^x dx$ es por partes, tomamos $u = (x - 2)$, $dv = e^x dx$, con lo cual $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$, y nos resulta

$$\int (x - 2) \cdot e^x dx = (x - 2) \cdot e^x - \int e^x dx = (x - 2) \cdot e^x - e^x = e^x \cdot (x - 3). \text{ Por tanto}$$

$$\text{Area} = -\int_1^2 (x - 2)e^x dx + \int_2^3 (x - 2)e^x dx = -\left[e^x(x - 3) \right]_1^2 + \left[e^x(x - 3) \right]_2^3 =$$

$$= -[e^2(2-3) - e^1(-2)] + [e^3(3-3) - e^2(2-3)] = 2e^2 + e \text{ u.a.}$$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 4 de 1998.

Una cierta función p se define como el cociente de dos funciones derivables f y g , es decir. $p(x) = f(x)/g(x)$.

En un punto a de su dominio la función p tiene un mínimo relativo y sabemos que $f'(a) = 6$ y $g'(a) = 2$.

¿Puedes obtener el valor de $p'(a)$? Razona tu respuesta

Solución

$$p(x) = f(x) / g(x)$$

$$p'(a) = 0, \text{ con } f'(a) = 6 \text{ y } g'(a) = 2$$

$$p'(x) = \left[(f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)) / (g(x))^2 \right]$$

Como $p'(a) = 0$, tenemos $f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a) = 0$, de donde

$$6/2 = f'(a) / g'(a) = f(a) / g(a) = p(a)$$

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 4 de 1998.

Sabiendo que la matriz A verifica la relación $A+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ resuelve el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Solución

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

De $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, obtenemos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Veamos el calculo de A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; |A| = -1; A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 4 de 1998.

Considera el tetraedro formado por el origen de coordenadas y los tres puntos en los que el plano $\Pi: 2x + 3y + 6z - 6 = 0$ corta a los ejes coordenados.

- Describe un procedimiento para calcular el volumen del tetraedro y calcula efectivamente su valor.
- Calcula razonadamente las coordenadas del punto simétrico al origen de coordenadas respecto al plano Π .

Solución

(a)

Sabemos que el volumen de un paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los 3 vectores que parten de un vértice hacia los ejes coordenados, y que un paralelepípedo contiene 6 ortoedros, por tanto el volumen de un ortoedro es un sexto del valor absoluto del producto mixto de tres vectores que partan de un vértice, es decir

$$V = 1/6 |[\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}]| \text{ u. v.}$$

$O(0,0,0)$ es el origen de coordenadas

Haciendo $x = y = 0$, obtenemos el punto $A(0,0,1) = \mathbf{OA}$

Haciendo $x = z = 0$, obtenemos el punto $B(0,2,0) = \mathbf{OB}$

Haciendo $z = y = 0$, obtenemos el punto $C(3,0,0) = \mathbf{OC}$

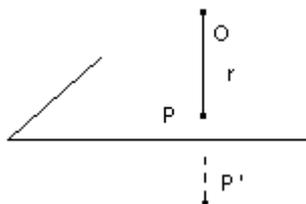
$$[\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

Por tanto $V = 1/6 |[\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}]| = 1/6 \cdot |-6| = 6/6 = 1 \text{ u. v.}$

(b)

Para calcular el punto simétrico del origen respecto del plano Π , calculamos la recta r perpendicular al plano Π por el origen, a continuación hallamos el punto P intersección de la recta r con el plano Π , y dicho punto es el punto medio de O y su simétrico P' pedido

En la figura se medio explica



$\Pi \equiv 2x + 3y + 6z - 6 = 0$, su vector normal es $\mathbf{n} = (2,3,6)$

La recta r perpendicular al plano Π , pasa por el punto $O(0,0,0)$ y tiene vector director $\mathbf{v} = \mathbf{n} = (2,3,6)$, luego su ecuación es $(x,y,z) = (2\lambda, 3\lambda, 6\lambda)$

$P = r \cap \Pi$

$2(2\lambda) + 3(3\lambda) + 6(6\lambda) = 0$, de donde $\lambda = 6/49$, y el punto P es

$$P(2 \cdot (6/49), 3 \cdot (6/49), 6 \cdot (6/49)) = (12/49, 18/49, 36/49)$$

Como P es el punto medio de O y su simétrico P' , tenemos que

$$(12/49, 18/49, 36/49) = ((x+0)/2, (y+0)/2, (z+0)/2), \text{ de donde}$$

$$P'(x,y,z) = P'(24/49, 36/49, 72/49)$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 4 de 1998.

Una locomotora sale de una estación y viaja durante una hora a lo largo de una trayectoria rectilínea. La velocidad de la locomotora al cabo de t horas viene dada en km./h., por la fórmula

$$v(t) = 400t^3 - 1200t^2 + 800t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

- (a) Calcula el espacio total que recorre la locomotora.
(b) Determina la velocidad máxima que alcanza la locomotora y el instante en el que lo hace.

Solución

(a)

Sabemos que $v(t) = 400t^3 - 1200t^2 + 800t$ ($0 \leq t \leq 1$) y que $v(t) = e'(t)$, por tanto aplicando el teorema fundamental del cálculo integral tenemos

$$e(t) = \int v(t) dt = \int (400t^3 - 1200t^2 + 800t) dt = 400 \cdot t^4 / (4) - 1200 t^3 / (3) + 800 t^2 / (2)$$

de donde $e(1) = 400/4 - 1200/3 + 800/2 = 100$ Km.

(b)

La velocidad máxima la calcularemos determinando los máximos de la función $v(t)$

$$v(t) = 400t^3 - 1200t^2 + 800t$$

$$v'(t) = 1200t^2 - 2400t + 800 = 0, \text{ simplificando tenemos}$$

$$3t^2 - 6t + 2 = 0, \text{ y resolviéndola nos da}$$

$$t = 1 \pm \sqrt{1/3}$$

$$v''(t) = 2400t - 2400$$

$$v''(1 + \sqrt{1/3}) > 0, \text{ luego es un mínimo}$$

$$v''(1 - \sqrt{1/3}) < 0, \text{ luego es un máximo, y el instante es } t = 1 - \sqrt{1/3} \text{ y la velocidad máxima es } v(t) = 400t^3$$

$$-1200t^2 + 800t = v(t) = 400(1 - \sqrt{1/3})^3 - 1200(1 - \sqrt{1/3})^2 + 800(1 - \sqrt{1/3}) \text{ Km/h.}$$

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 4 de 1998.

Considera la función valor absoluto, es decir, la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$.

- (a) Estudia la derivabilidad de f .
(b) Dibuja la gráfica de f .

(b) Halla $\int_{-2}^2 |x| dx$

Solución

(a)

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Tenemos que ver si existe $f'(0)$, es decir si $f'(0^+) = f'(0^-)$

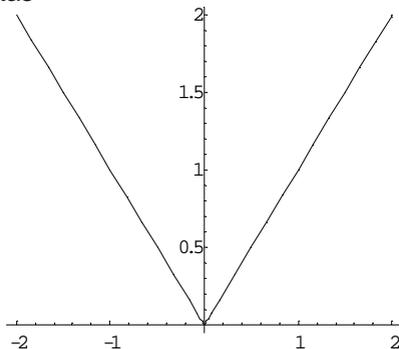
$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, no existe $f'(0)$.

(b)

La gráfica de $f(x)$ son dos trozos de rectas



(c)

$$\int_{-2}^2 |x| dx = \int_{-2}^0 -x dx + \int_0^2 x dx = \left[\frac{-x^2}{2} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0}^2 = (0) - (-2) + (2) - 0 = 4$$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 4 de 1998.

Considera los puntos $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (-1, -1, 2)$

(a) Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos que se encuentran a igual distancia del punto P que del punto Q.

(b) Halla la ecuación del plano que corta perpendicularmente y en su punto medio al segmento que une los puntos P y Q.

Solución

(a)

Los puntos X que están a igual distancia verifican $d(P,X) = d(Q,X)$

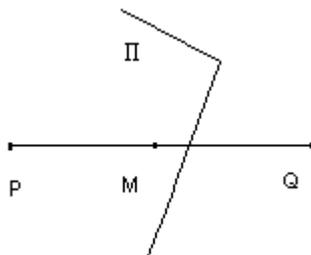
$\mathbf{PX} = (x-1, y-1, z-1)$, luego $|\mathbf{PX}| = [(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2]^{(1/2)}$

$\mathbf{QX} = (x+1, y+1, z-2)$, luego $|\mathbf{QX}| = [(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2]^{(1/2)}$

Igualando $|\mathbf{PX}| = |\mathbf{QX}|$, y elevando al cuadrado tenemos

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2$ desarrollando y simplificando sale
 $0 = 4x + 4y - 2z - 3$, que es un plano.

(b)



El plano Π pedido pasa por el punto $M((1-1)/2, (1-1)/2, (1+2)/2) = M(0,0,3/2)$, y tiene como vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{PQ} = (-2, -2, 1)$

$\Pi \equiv -2(x-0) - 2(y-0) + 1(z-3/2) = -2x - 2y + z - 3/2 = 0$

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 4 de 1998.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Comprueba que se verifica $A^2 - 2A + I = O$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

(b) Usando la igualdad anterior, calcula razonadamente A^{-1} y A^2 .

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A + I_3 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 \\ -4 & 2 & -2 \\ 8 & -8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$A^2 = 2A - I$. Multiplicando por la derecha por A^{-1}

$A^2 \cdot A^{-1} = 2A \cdot A^{-1} - I \cdot A^{-1}$. operando sale

$$A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 = 4A^2 - 4A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I =$

$$= 4 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$